Exercice 23 :

a) Chute libre sans vitesse initiale

- Système {stylo} référentiel terrestre
- Forces extérieures : Poids $\vec{P}$
- D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

- Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

  $\vec{g}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$

- $\dfrac{d\vec{v}_G(t)}{dt} = \vec{a}_G$ d'où par intégration

$$\begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = gt + k_2 \end{cases}$$

$\vec{v}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

or $\begin{cases} v_x(0) = 0 = k_1 \\ v_y(0) = 0 = g \times 0 + k_2 \end{cases}$

d'où $k_1 = 0$ et $k_2 = 0$

Finalement $\boxed{\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = gt \end{cases}}$

Exercice 23 (Suite) ②

- $\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \overrightarrow{v_G}(t)$ d'où par intégration

$$\begin{cases} x(t) = k_3 \\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + k_4 \end{cases}$$

D'après les conditions initiales $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x(0) = 0 = k_3 \\ y(0) = 0 = \frac{1}{2}g \times 0^2 + k_4 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} k_3 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}$

Finalement $\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}}$ (1) La chute est bien verticale selon l'axe (O,y)

durée de chute de Stan : t_E

On utilise la relation (1)

$$y(t_E) = \frac{1}{2}gt_E^2$$

Si $y(t_E) = h$ alors $h = \frac{1}{2}gt_E^2$

$$t_E = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$t_E = \sqrt{\frac{2 \times 28}{9{,}81}}$ $t_E = 2{,}4$ s.

Vitesse d'entrée dans l'eau : v_E

On utilise les équations horaires de la vitesse.

$$\begin{cases} v_x(t_E) = 0 \\ v_y(t_E) = gt_E \end{cases}$$ avec $t_E = 2{,}4$ s

$$v_E = \sqrt{v_x(t_E)^2 + v_y^2(t_E)} = \sqrt{g^2 t_E^2}$$

$v_E = 23{,}5$ m/s soit $84{,}6$ km/h

Exercice 23 (Suite)

b) La vitesse initiale devient $\vec{v_0}\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

les équations horaires de la vitesse deviennent.

$$\begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = gt + k_2 \end{cases}$$

or $\begin{cases} v_x(0) = v_0 = k_1 \\ v_y(0) = g \times 0 + k_2 = 0 \end{cases}$ d'où $k_1 = v_0$ $k_2 = 0$

Finalement $\boxed{\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = gt \end{cases}}$

• $\dfrac{d\vec{OG}}{dt} = \vec{v_G}(t)$ d'où par intégration

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + k_3 \\ y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + k_4 \end{cases}$$

or $\begin{cases} x(0) = v_0 \times 0 + k_3 = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2} g \times 0^2 + k_4 = 0 \end{cases}$ d'où $k_3 = 0$ et $k_4 = 0$

Finalement $\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad (2) \end{cases}}$

Durée de chute de Stan : t'_E

On utilise la relation (2) (non modifiée)

Si $y(t'_E) = h$ alors $h = \frac{1}{2} g t'^2_E$

$$t'_E = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad t'_E = 2,4 s.$$

Exercice 23 (Suite)

Vitesse d'entrée dans l'eau : v'_E

$$v'_E = \sqrt{v_x^2(t'_E) + v_y^2(t'_E)}$$

$$v'_E = \sqrt{v_0^2 + (g\,t'_E)^2}$$

$$v'_E = \sqrt{2{,}0^2 + (9{,}81 \times 2{,}4)^2}$$

$$\underline{v'_E = 24 \text{ m/s.}}$$