Effectuer une analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de déterminer la dimension d'une grandeur et donc d'en déduire son unité.
Elle permet également de vérifier l'exactitude d'une formule.

Aide pour l'exercice 36 p 433

Voir également p 517

1. Le Système international d'unités (SI)

Le système international d'unités définit **sept unités de base** associées à **sept grandeurs de base**. Toutes les autres unités, appelées **unités dérivées**, peuvent s'exprimer comme une combinaison de ces unités de base.

Grandeur de base	Unité de base	Symbole
longueur	mètre	m
masse	kilogramme	kg
temps	seconde	s
courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

2. Dimension d'une grandeur

- Par convention, toutes les grandeurs sont organisées selon un système de dimensions. Chacune des sept grandeurs de base a sa **propre dimension**, représentée symboliquement par une lettre majuscule.

Grandeur de base	Symbole de la dimension
longueur	L
masse	M
temps	T
courant électrique	I
température	Θ
quantité de matière	N
intensité lumineuse	J

- Toutes les autres grandeurs sont des **grandeurs dérivées.** Les dimensions des grandeurs dérivées se déterminent à partir des dimensions des sept grandeurs de base et des équations de la physique.
- La **dimension** d'une grandeur G se note entre crochets : $[G]$. Si $[G] = 1$, la grandeur G est **sans dimension**.

Exemple

On cherche à déterminer la dimension d'une vitesse.

$v = \dfrac{d}{\Delta t}$ avec v, vitesse ; d, distance parcourue ; Δt, temps mis pour parcourir la distance d

On a alors : $[v] = \dfrac{[d]}{[\Delta t]} = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$. La dimension d'une vitesse est donc une longueur divisée par un temps.

3. De la dimension à l'unité

- On peut déterminer l'unité de n'importe quelle grandeur simplement à partir de sa dimension.

Exemple

Pour déterminer l'unité d'une force F dans le Système international, on détermine sa dimension $[F]$ à l'aide d'une équation de la physique : $P = m \cdot g$.

$[F] = [P] = [m] \cdot [g] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$.

On en déduit que l'unité d'une force dans le Système international est le kilogramme-mètre par seconde au carré ($\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$).

Unité de g : $\mathrm{m.s^{-2}}$

4. Analyse dimensionnelle d'une formule

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier qu'une formule est **homogène**, c'est-à-dire que les deux membres de la formule ont la même dimension. Dans le cas contraire, la formule est nécessairement fausse.

Exemple

On peut vérifier l'homogénéité de la formule suivante :

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{r^3}{G \cdot M}}$ avec T, période de révolution d'une planète, G, constante de gravitation universelle, r, rayon de l'orbite circulaire, M, masse de l'astre attracteur.

D'une part, $[T] = \mathrm{T}$.

D'autre part : $\left[2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{r^3}{G \cdot M}}\right] = \sqrt{\dfrac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{L}^3 \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{M}}} = \sqrt{\mathrm{T}^2} = \mathrm{T}$.

Cette formule est bien homogène.

Unité de G : $\mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-3}}$

La dimension d'une grandeur peut également se noter dim grandeur (voir livre p 517).